ローレンツ変換によらない
相対論の統一的理解

葛西 真寿

口上

特殊相対論的諸現象

- 運動する時計の遅れ
- ローレンツ収縮
- 光のドップラー効果・光行差 etc.

通常は,
基準（静止）慣性系から
別の（運動）慣性系への座標変換である
ローレンツ変換で説明される

座標変換で説明される

⇓

座標系がかわれば

時間の進み方がかわる

などという「誤解」を助長しかねない

本質は
観測者（の運動状態）が異なれば
時間の進み方が異なる
ということ

本質は
観測者（の運動状態）が異なれば
時間の進み方が異なる
ということ

観測量が座標系に依存するはずはない
時計の進み方の違いもりっぱな観測量
観測者と座標系を混同しちゃダメ

いっそのこと
ローレンツ変換を使わずに
特殊相対論的諸現象を説明できれば,

座標系がかわれば時間の進み方がかわる

などという不適切な表現も必要なくなる。

さらに

時間の進み方の違い

- 運動する時計の進み
  （運動による特殊相対論的効果）
- スカイツリー展望台と地上の時計の進み
  （重力ポテンシャルによる一般相対論的効果）
- GPS 衛星の時計の進み
  （運動による特殊相対論的効果＋
  重力による一般相対論的効果）

時間の進み方の違い

- **運動する時計の進み**
  （運動による特殊相対論的効果）

ローレンツ変換が使えるのは
この状況のみ

なので…

特殊および一般相対論的効果の

統一的理解のためには

ローレンツ変換を使わずに特殊相対論的効果

を理解することはできるのか？

という問いは，きわめて有意義

ローレンツ変換を使わずに特殊相対論的効果を理解することはできるのか？

という問いに対して，私は

できる！

と答えたい

Understanding Theory of Relativity

特殊および一般相対論の統一的理解

ローレンツ変換によらない特殊相対論の統一的理解

以降はWebサイトの記載内容を
数式入りで
かいつまんで説明

また，時間の進み方の違いは，運動する観測者に対して起こる特殊相対論的効果だけではない。「**スカイツリーと地上の時間の進み方の違い**」のように，運動ではなく重力ポテンシャルの違いによる一般相対論的効果や，GPS衛星に搭載された時計

このセクションの構成

ローレンツ変換によらない特殊相対論の統一的理解
- 光速の不変性
- 特殊相対性理論の記法のまとめ
- 観測者の4元速度
- 運動している時計の遅れ
- ローレンツ収縮
- 3次元速度の合成則
- 光の4元ベクトル
- 光のドップラー効果
- 光行差
- 電磁場の変換
  - 補足：完全反対称な Levi-Civita テンソル
- 電磁場の変換の必要性

このページの目次

- 表記について
このセクションの構成

最近の Memo

Maxima の ctensor で Kottler 計量のチェック

観測者の４元速度

慣性系 S において（以下，$c=1$）

観測者 A は静止（基準）観測者.

観測者 B は x 方向に V で運動.

観測者の 4 元速度

慣性系 S において（以下，$c=1$）

観測者 A は静止（基準）観測者．世界線: $x^\mu(\tau)$, 4 元速度: $u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$

$$
\begin{aligned}
\frac{dx^i}{dt} &= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \frac{u^i}{u^0} = (0,0,0) \\
u_\mu u^\mu &= -1 \quad \text{より} \\
u^\mu &= (1,0,0,0)
\end{aligned}
$$

観測者 B は x 方向に V で運動.

観測者の4元速度

慣性系 S において（以下，$c=1$）

観測者 A は静止（基準）観測者．世界線: $x^\mu(\tau)$, 4元速度: $u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$

$$\frac{dx^i}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \frac{u^i}{u^0} = (0,0,0)$$

$$u_\mu u^\mu = -1 \quad \text{より}$$

$$u^\mu = (1,0,0,0)$$

観測者 B は x 方向に V で運動．世界線: $\bar{x}^\mu(\tau)$, 4元速度: $\bar{u}^\mu = \dfrac{d\bar{x}^\mu}{d\tau}$

$$\frac{d\bar{x}^i}{d\bar{t}} = \left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}, \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}}, \frac{d\bar{z}}{d\bar{t}}\right) = \frac{\bar{u}^i}{\bar{u}^0} = (V,0,0)$$

$$\bar{u}_\mu \bar{u}^\mu = -1 \quad \text{より}$$

$$\bar{u}^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}, \frac{V}{\sqrt{1-V^2}}, 0, 0\right)$$

4元速度の合成則

運動方向を表す単位ベクトル: $e^\mu = (0, 1, 0, 0)$ を使って表すと

$$
\begin{aligned}
\bar{u}^\mu &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}, \frac{V}{\sqrt{1-V^2}}, 0, 0 \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}(1, 0, 0, 0) + \frac{V}{\sqrt{1-V^2}}(0, 1, 0, 0) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} u^\mu + \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} e^\mu
\end{aligned}
$$

4元速度の合成則

運動方向を表す単位ベクトル: $e^\mu = (0,1,0,0)$ を使って表すと

$$\begin{aligned}
\bar{u}^\mu &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}, \frac{V}{\sqrt{1-V^2}}, 0, 0\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}(1,0,0,0) + \frac{V}{\sqrt{1-V^2}}(0,1,0,0) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}u^\mu + \frac{V}{\sqrt{1-V^2}}e^\mu
\end{aligned}$$

これはベクトル式だから，**任意の座標系において成り立つ。**

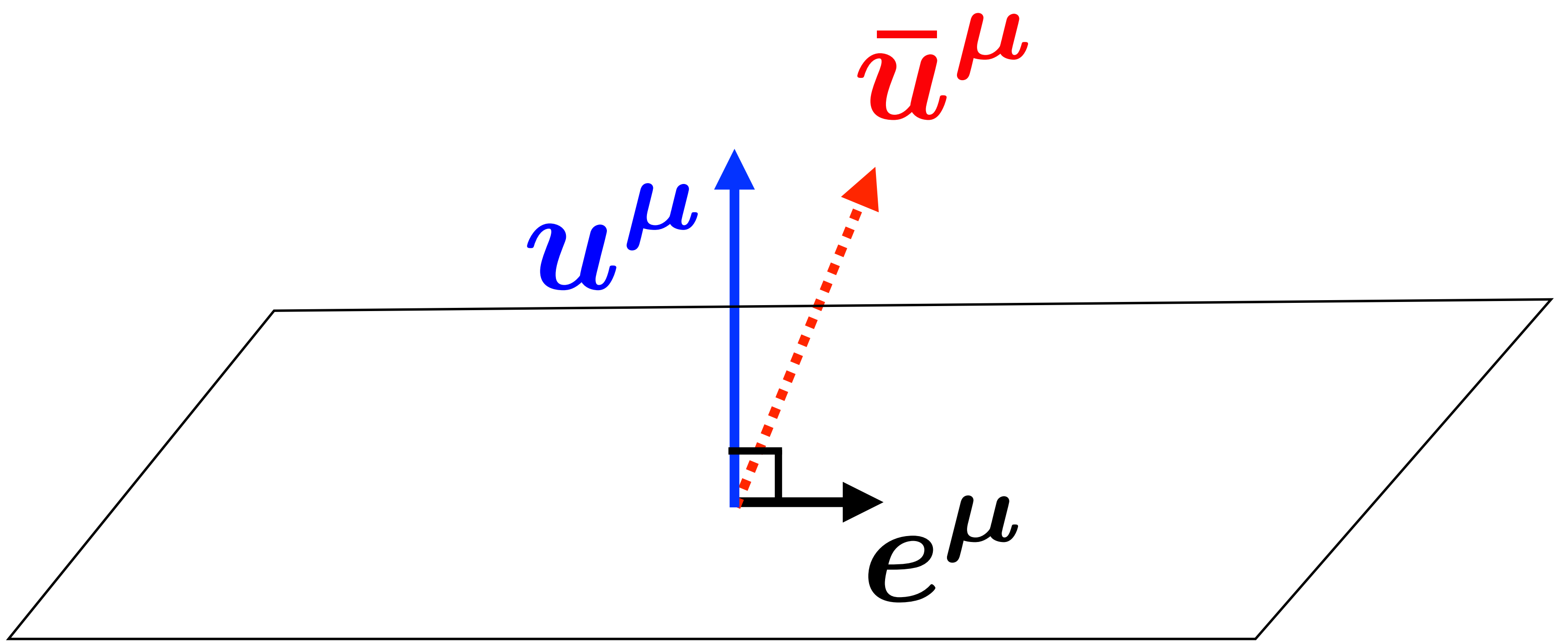
$$\boxed{\bar{u}^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}u^\mu + \frac{V}{\sqrt{1-V^2}}e^\mu}$$

一般相対論的状況でも成り立つ！

4元速度の合成則

4元速度の合成則

$$\color{red}{\bar{u}^\mu} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\color{blue}{u^\mu} + \frac{V}{\sqrt{1-V^2}}e^\mu$$

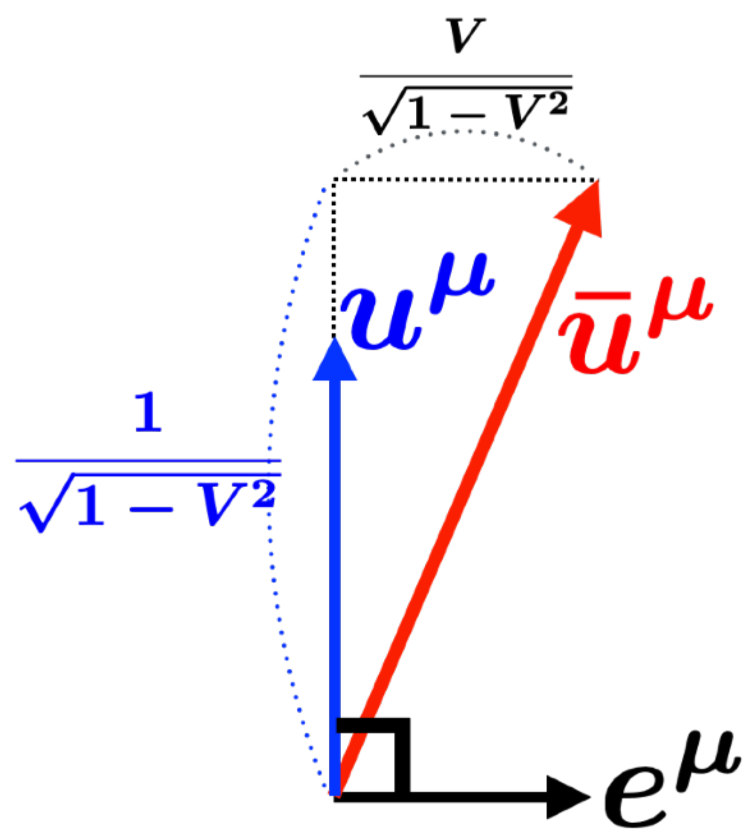


4元速度 $\color{blue}{\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\mu}}}$ の観測者 A の同時刻超曲面

4元速度の合成則

4元速度の合成則

$$\bar{u}^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} u^\mu + \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} e^\mu$$



要はベクトルの足し算

4元速度の合成則の逆変換

4元速度の合成則

$$\bar{u}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} u^{\mu} + \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} e^{\mu}$$

一方，4元速度 $\bar{u}^{\mu}$ の観測者 B からみると，
4元速度 u^{μ} の観測者 A は，
$\bar{u}^{\mu}$ に直交する空間的単位ベクトル $\bar{e}^{\mu}$ のマイナス方向に速さ V で運動。
従って，

$$u^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \bar{u}^{\mu} - \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} \bar{e}^{\mu}$$

4元速度の合成則: まとめ

- 観測者 A の4元速度 u^μ と, u^μ に直交する空間的単位ベクトル e^μ
- 観測者 B の4元速度 $\bar{u}^\mu$ と, $\bar{u}^\mu$ に直交する空間的単位ベクトル $\bar{e}^\mu$

速度合成則

$$\bar{u}^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} u^\mu + \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} e^\mu, \quad \bar{e}^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} e^\mu + \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} u^\mu$$

逆変換

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \bar{u}^\mu - \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} \bar{e}^\mu, \quad e^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \bar{e}^\mu - \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} \bar{u}^\mu$$

4元速度の合成則: まとめ

- 観測者 A の4元速度 u^μ と, u^μ に直交する空間的単位ベクトル e^μ
- 観測者 B の4元速度 $\bar{u}^\mu$ と, $\bar{u}^\mu$ に直交する空間的単位ベクトル $\bar{e}^\mu$

速度合成則

$$\bar{u}^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}u^\mu + \frac{V}{\sqrt{1-V^2}}e^\mu, \quad \bar{e}^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}e^\mu + \frac{V}{\sqrt{1-V^2}}u^\mu$$

逆変換

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\bar{u}^\mu - \frac{V}{\sqrt{1-V^2}}\bar{e}^\mu, \quad e^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\bar{e}^\mu - \frac{V}{\sqrt{1-V^2}}\bar{u}^\mu$$

4元ベクトルの内積が**ローレンツ因子**を与えることに注意！

$$\boxed{-u_\mu \bar{u}^\mu = e_\mu \bar{e}^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}}$$

4元速度の合成則：まとめ

- 観測者 A の4元速度 u^μ と，u^μ に直交する空間的単位ベクトル e^μ
- 観測者 B の4元速度 $\bar{u}^\mu$ と，$\bar{u}^\mu$ に直交する空間的単位ベクトル $\bar{e}^\mu$

$\vdots$

ローレンツ因子（*γ factor*）

は

4次元スカラー（不変量）

というのが私の立場

4元ベクトルの内積が**ローレンツ因子**を与えることに注意！

$$\boxed{-u_\mu \bar{u}^\mu = e_\mu \bar{e}^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}}$$

4元速度の合成則: まとめ

- 観測者 A の4元速度 u^μ と, u^μ に直交する空間的単位ベクトル e^μ
- 観測者 B の4元速度 $\bar{u}^\mu$ と, $\bar{u}^\mu$ に直交する空間的単位ベクトル $\bar{e}^\mu$

時間が遅れたり，棒が縮んだりするのも

すべて

この不変スカラーである

ローレンツ因子の影響！

4元ベクトルの内積が**ローレンツ因子**を与えることに注意！

$$\boxed{-u_\mu \bar{u}^\mu = e_\mu \bar{e}^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}}$$

運動している時計の遅れ

4元速度 $\bar{u}^\mu$ の観測者 B と一緒に運動する時計が T_0 だけ時を刻む。
これを表す4元ベクトル t^μ は

$$t^\mu = T_0 \, \bar{u}^\mu$$

運動している時計の遅れ

4元速度 $\bar{u}^\mu$ の観測者 B と一緒に運動する時計がT_0 だけ時を刻む。
これを表す4元ベクトル t^μ は

$$t^\mu = T_0\,\bar{u}^\mu$$

観測者 B が測定する時間は $\bar{u}^\mu$ にそった「成分」であり，

$$t_\mu \frac{\bar{u}^\mu}{\bar{u}_\nu \bar{u}^\nu} = T_0$$

運動している時計の遅れ

4元速度 $\bar{u}^\mu$ の観測者 B と一緒に運動する時計がT_0 だけ時を刻む。
これを表す4元ベクトル t^μ は

$$t^\mu = T_0\,\bar{u}^\mu$$

観測者 B が測定する時間は $\bar{u}^\mu$ にそった「成分」であり，

$$t_\mu \frac{\bar{u}^\mu}{\bar{u}_\nu \bar{u}^\nu} = T_0$$

一方，観測者 A が測定する時間 T は u^μ にそった「成分」であり，

$$T = t_\mu \frac{u^\mu}{u_\nu u^\nu} = -T_0 \boxed{\bar{u}_\mu u^\mu} = \frac{T_0}{\sqrt{1-V^2}}$$

運動している時計の遅れ

4元速度 $\bar{u}^\mu$ の観測者 B と一緒に運動する時計が T_0 だけ時を刻む。
これを表す4元ベクトル t^μ は

$$t^\mu = T_0\,\bar{u}^\mu$$

観測者 B が測定する時間は $\bar{u}^\mu$ にそった「成分」であり，

$$t_\mu \frac{\bar{u}^\mu}{\bar{u}_\nu \bar{u}^\nu} = T_0$$

一方，観測者 A が測定する時間 T は u^μ にそった「成分」であり，

$$T = t_\mu \frac{u^\mu}{u_\nu u^\nu} = -T_0\,\bar{u}_\mu u^\mu = \frac{T_0}{\sqrt{1-V^2}}$$

$$\boxed{\therefore \quad T_0 = T\sqrt{1-V^2} < T}$$

運動する時計の刻む時間 T_0 は静止観測者 A の測定時間 T より小さく，
運動する時計は遅れる。

ローレンツ収縮

棒は観測者 B の運動方向 e^μ に平行にB とともに運動すると仮定。
棒の長さを表す4元ベクトル ℓ^μ は，

$$\ell^\mu \equiv L\, e^\mu$$

観測者 A が測定する長さはe^μにそった「成分」であり，

$$\ell_\mu e^\mu = L\, e_\mu e^\mu = L$$

ローレンツ収縮

棒は観測者 B の運動方向 e^μ に平行に B とともに運動すると仮定。
棒の長さを表す4元ベクトル ℓ^μ は，

$$\ell^\mu \equiv L\, e^\mu$$

観測者 A が測定する長さは e^μ にそった「成分」であり，

$$\ell_\mu e^\mu = L\, e_\mu e^\mu = L$$

一方，観測者 B が測定する長さ L_0 は $\bar{e}^\mu$ にそった「成分」であり，

$$L_0 \equiv \ell_\mu \bar{e}^\mu = L \boxed{e_\mu \bar{e}^\mu} = \frac{L}{\sqrt{1-V^2}}$$

ローレンツ収縮

棒は観測者 B の運動方向 e^μ に平行に B とともに運動すると仮定。
棒の長さを表す4元ベクトル ℓ^μ は，

$$\ell^\mu \equiv L\, e^\mu$$

観測者 A が測定する長さは e^μ にそった「成分」であり，

$$\ell_\mu e^\mu = L\, e_\mu e^\mu = L$$

一方，観測者 B が測定する長さ L_0 は $\bar{e}^\mu$ にそった「成分」であり，

$$L_0 \equiv \ell_\mu \bar{e}^\mu = L\, e_\mu \bar{e}^\mu = \frac{L}{\sqrt{1-V^2}}$$

$$\boxed{\therefore \quad L = L_0\sqrt{1-V^2} < L_0}$$

観測者 A が測定する棒の長さ L は，
棒とともに運動している観測者 B が測定する長さ L_0 よりも短い。

3次元速度の合成則

観測者 A ($\boldsymbol{u}$) は基準観測者
観測者 B ($\bar{\boldsymbol{u}}$) は A に対して速さ V で $\boldsymbol{e}$ 方向に運動し,
観測者 C ($\tilde{\boldsymbol{u}}$) は B に対して速さ W で $\bar{e}$ 方向に運動する。

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\left(\boldsymbol{u} + V\boldsymbol{e}\right), \qquad \tilde{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{\sqrt{1-W^2}}\left(\bar{\boldsymbol{u}} + W\bar{\boldsymbol{e}}\right)$$

3次元速度の合成則

観測者 A ($\boldsymbol{u}$) は基準観測者
観測者 B ($\bar{\boldsymbol{u}}$) は A に対して速さ V で $\boldsymbol{e}$ 方向に運動し，
観測者 C ($\tilde{\boldsymbol{u}}$) は B に対して速さ W で $\bar{\boldsymbol{e}}$ 方向に運動する。

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\left(\boldsymbol{u} + V\boldsymbol{e}\right), \qquad \tilde{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{\sqrt{1-W^2}}\left(\bar{\boldsymbol{u}} + W\bar{\boldsymbol{e}}\right)$$

これらから，B の4元ベクトルを消去すると，以下が示される。

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V+W}{1+VW}\right)^2}}\left\{\boldsymbol{u} + \frac{V+W}{1+VW}\boldsymbol{e}\right\}$$

3次元速度の合成則

観測者 A $(\boldsymbol{u})$ は基準観測者
観測者 B $(\bar{\boldsymbol{u}})$ は A に対して速さ V で $\boldsymbol{e}$ 方向に運動し，
観測者 C $(\tilde{\boldsymbol{u}})$ は B に対して速さ W で $\bar{\boldsymbol{e}}$ 方向に運動する。

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\left(\boldsymbol{u} + V\boldsymbol{e}\right), \qquad \tilde{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{\sqrt{1-W^2}}\left(\bar{\boldsymbol{u}} + W\bar{\boldsymbol{e}}\right)$$

これらから，B の4元ベクトルを消去すると，以下が示される。

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V+W}{1+VW}\right)^2}}\left\{\boldsymbol{u} + \frac{V+W}{1+VW}\boldsymbol{e}\right\}$$

観測者 C $(\tilde{\boldsymbol{u}})$ の，観測者 A（$\boldsymbol{u}$）に対する速さは

$$\boxed{U \equiv \frac{V+W}{1+VW}}$$

光の4元ベクトルの $3+1$ 分解

光の伝播をあらわす 4元ベクトル $\boldsymbol{k}$
観測者 A の4元速度 $\boldsymbol{u}$ に基づいた $3+1$ 分解

$$\boldsymbol{k} \;= \omega(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\gamma})$$

$\omega \equiv -\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u}$ は観測者 A が測定する光の振動数
$\boldsymbol{\gamma}$ は光の進行方向（視線方向）を表す空間的単位ベクトル

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0, \qquad \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 1$$

光の4元ベクトルの $3+1$ 分解

光の伝播をあらわす 4元ベクトル $\boldsymbol{k}$
観測者 A の4元速度 $\boldsymbol{u}$ に基づいた $3+1$ 分解

$$\boldsymbol{k} \ = \omega(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\gamma})$$

$\omega \equiv -\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u}$ は観測者 A が測定する光の振動数
$\boldsymbol{\gamma}$ は光の進行方向（視線方向）を表す空間的単位ベクトル

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0, \qquad \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 1$$

観測者 B の4元速度 $\bar{\boldsymbol{u}}$ に基づいた $3+1$ 分解も同様に，

$$\boldsymbol{k} \ = \bar{\omega}(\bar{\boldsymbol{u}} + \bar{\boldsymbol{\gamma}})$$

$\bar{\omega} \equiv -\boldsymbol{k} \cdot \bar{\boldsymbol{u}}$ は観測者 B が測定する光の振動数
$\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ は光の進行方向（視線方向）を表す空間的単位ベクトル

$$\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \bar{\boldsymbol{\gamma}} = 0, \qquad \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\boldsymbol{\gamma}} = 1$$

光のドップラー効果

静止光源からの光を運動する観測者 B が測定する場合

$$\omega = -\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u}$$

光のドップラー効果

静止光源からの光を運動する観測者 B が測定する場合

$$\begin{aligned}
\omega = -\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u} &= -\bar{\omega}(\bar{\boldsymbol{u}}+\bar{\boldsymbol{\gamma}})\cdot\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}(\bar{\boldsymbol{u}}-V\bar{\boldsymbol{e}}) \\
&= \bar{\omega}\frac{1+V\bar{\boldsymbol{\gamma}}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}}{\sqrt{1-V^2}} \\
&= \bar{\omega}\frac{1+V\cos\bar{\theta}}{\sqrt{1-V^2}}
\end{aligned}$$

光のドップラー効果

静止光源からの光を運動する観測者 B が測定する場合

$$
\begin{aligned}
\omega = -\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u} &= -\bar{\omega}(\bar{\boldsymbol{u}}+\bar{\boldsymbol{\gamma}})\cdot\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}(\bar{\boldsymbol{u}}-V\bar{\boldsymbol{e}}) \\
&= \bar{\omega}\frac{1+V\bar{\boldsymbol{\gamma}}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}}{\sqrt{1-V^2}} \\
&= \bar{\omega}\frac{1+V\cos\bar{\theta}}{\sqrt{1-V^2}}
\end{aligned}
$$

光源静止観測者 A の測定する振動数 ω をあらためて ω_0 と表記し直すと，運動する観測者が測定する振動数 $\bar{\omega}$ は

$$
\boxed{\bar{\omega} = \omega_0\frac{\sqrt{1-V^2}}{1+V\cos\bar{\theta}}}
$$

運動している光源からの光を静止観測者が測定する場合も同様に...

光行差

静止観測者 A の視線方向 $\boldsymbol{\gamma}$ と運動方向のなす角 θ

$$\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{e} \equiv |\boldsymbol{\gamma}||\boldsymbol{e}| \cos\theta = \cos\theta$$

光行差

静止観測者 A の視線方向 $\boldsymbol{\gamma}$ と運動方向のなす角 θ

$$\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{e} \equiv |\boldsymbol{\gamma}||\boldsymbol{e}| \cos\theta = \cos\theta$$

静止観測者 B の視線方向 $\bar{\gamma}$ と運動方向のなす角 $\bar{\theta}$

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\boldsymbol{e}} \equiv |\bar{\boldsymbol{\gamma}}||\bar{\boldsymbol{e}}| \cos\theta = \cos\bar{\theta}$$

光行差

静止観測者 A の視線方向 γ と運動方向のなす角 θ

$$\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{e} \equiv |\boldsymbol{\gamma}||\boldsymbol{e}| \cos\theta = \cos\theta$$

静止観測者 B の視線方向 $\bar{\gamma}$ と運動方向のなす角 $\bar{\theta}$

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\boldsymbol{e}} \equiv |\bar{\boldsymbol{\gamma}}||\bar{\boldsymbol{e}}| \cos\theta = \cos\bar{\theta}$$

$\boldsymbol{\gamma}$ と $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$, $\boldsymbol{e}$ と $\bar{\boldsymbol{e}}$ にある以下の関係式

$$\boldsymbol{k} = \omega(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\gamma}) = \bar{\omega}(\bar{\boldsymbol{u}} + \bar{\boldsymbol{\gamma}}), \qquad \bar{e}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} e^{\mu} + \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} u^{\mu}$$

から， θ と $\bar{\theta}$ は関係づけられて

$$\boxed{\cos\bar{\theta} = \frac{\cos\theta - V}{1 - V\cos\theta}}$$

電磁場の変換

S 系に対して速度 $\boldsymbol{V}$ で運動する S' 系でみると，
電磁場の $\boldsymbol{V}$ に平行な成分（ $_{//}$ をつけて表す），
および垂直な成分（ $_{\perp}$ をつけて表す）は以下のように変換される。

$$\boldsymbol{E}'_{//} = \boldsymbol{E}_{//}, \quad \boldsymbol{E}'_{\perp} = \frac{\boldsymbol{E}_{\perp} + (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B})_{\perp}}{\sqrt{1 - V^2}}$$

$$\boldsymbol{B}'_{//} = \boldsymbol{B}_{//}, \quad \boldsymbol{B}'_{\perp} = \frac{\boldsymbol{B}_{\perp} - (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{E})_{\perp}}{\sqrt{1 - V^2}}$$

以上の結果も，ローレンツ変換を使わずに導くことができる。

電磁場の変換　詳細は Web サイト参照

Understanding Theory of Relativity

特殊および一般相対論の統一的理解

特殊相対論　時空の表し方　光の伝播　粒子の運動　時間の進み方　宇宙論　その他　検索

このセクションの構成

ローレンツ変換によらない特殊相対論の統一的理解
- 光速の不変性
- 特殊相対性理論の記法のまとめ
- 観測者の4元速度
- 運動している時計の遅れ
- ローレンツ収縮
- 3次元速度の合成則
- 光の4元ベクトル
- 光のドップラー効果
- 光行差
- **電磁場の変換**
  - 補足：完全反対称な Levi-Civita テンソル
- 電磁場の変換の必要性

Return to ローレンツ変換によらない特殊相対論の統一的理解

電磁場の変換

$\boldsymbol{S}$ 系に対して速度 $\boldsymbol{V}$ で運動する $\boldsymbol{S}'$ 系でみると，電磁場の $\boldsymbol{V}$ に平行な成分（ $_{/\!/}$ をつけて表す），および垂直な成分（ $_{\perp}$ をつけて表す）は以下のように変換される。

$$\boldsymbol{E}'_{/\!/} = \boldsymbol{E}_{/\!/}, \quad \boldsymbol{E}'_{\perp} = \frac{\boldsymbol{E}_{\perp} + (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B})_{\perp}}{\sqrt{1 - V^2}}$$

$$\boldsymbol{B}'_{/\!/} = \boldsymbol{B}_{/\!/}, \quad \boldsymbol{B}'_{\perp} = \frac{\boldsymbol{B}_{\perp} - (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{E})_{\perp}}{\sqrt{1 - V^2}}$$

特殊及び一般相対論的効果による時間の進み・遅れの統一的理解へ向けた準備

重力場中の光の伝播

光の世界線 $x^\mu(v)$ の接ベクトルが，伝播を表す4元ベクトル

$$\boldsymbol{k} = k^\mu \boldsymbol{e}_\mu \equiv \frac{dx^\mu}{dv}\boldsymbol{e}_\mu$$

重力場中の光の伝播はヌルで，測地線。

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 0, \qquad \frac{d\boldsymbol{k}}{dv} = \boldsymbol{0}$$

重力場中の光の伝播

光の世界線 $x^\mu(v)$ の接ベクトルが，伝播を表す4元ベクトル

$$\boldsymbol{k} = k^\mu \boldsymbol{e}_\mu \equiv \frac{dx^\mu}{dv}\boldsymbol{e}_\mu$$

重力場中の光の伝播はヌルで，測地線。

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 0, \qquad \boxed{\frac{d\boldsymbol{k}}{dv} = \boldsymbol{0}}$$

「測地線」とは

世界線にそって接ベクトルが一定である線

つまり

「まっすぐな線」

重力場中の光の伝播

光の世界線　$x^\mu(v)$ の接ベクトルが，伝播を表す4元ベクトル

$$\boldsymbol{k} = k^\mu \boldsymbol{e}_\mu \equiv \frac{dx^\mu}{dv}\boldsymbol{e}_\mu$$

重力場中の光の伝播はヌルで，測地線。

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 0, \qquad \frac{d\boldsymbol{k}}{dv} = \boldsymbol{0}$$

$k_\nu \equiv \boldsymbol{e}_\nu \cdot \boldsymbol{k} = g_{\nu\mu}k^\mu$ に対する測地線方程式（保存量を利用するのに便利）

$$\boxed{\frac{dk_\nu}{dv} = \frac{1}{2}g_{\lambda\mu,\nu}k^\lambda k^\mu}$$

例：静的時空なら

$$g_{\lambda\mu,0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dk_0}{dv} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_0 = \text{const.} \equiv -\omega_c}$$

重力赤方偏移

シュバルツシルト時空中の静止観測者の4元速度 u^μ は

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}, 0, 0, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}}, 0, 0, 0\right)$$

4元速度 u^μ の静止観測者が観測する光の振動数は

$$\omega \equiv -k_\mu u^\mu = \frac{\omega_c}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}}$$

となり，同じ光 $\boldsymbol{k}$ を観測していても，振動数 ω は位置 r に依存する。

重力赤方偏移

シュバルツシルト時空中の静止観測者の4元速度 u^μ は

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}, 0, 0, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}}, 0, 0, 0\right)$$

4元速度 u^μ の静止観測者が観測する光の振動数は

$$\omega \equiv -k_\mu u^\mu = \frac{\omega_c}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}}$$

となり，同じ光 $\boldsymbol{k}$ を観測していても，振動数 ω は位置 r に依存する。
特に $r = r_1$ で ω_1 の光を $r = r_2 > r_1$ で測定したときの振動数 ω_2 は

$$\boxed{\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r_1}}}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r_2}}} < 1, \quad \therefore \quad \omega_2 < \omega_1}$$

重力赤方偏移

1秒の定義：時間の進みの定義

国際単位系 (SI) における時間の単位である「秒」の定義は，

セシウム133の原子の基底状態の二つの超微細準位の間の遷移に対応する放射の周期の9192631770倍が1秒

つまり，（セシウム原子時計でもストロンチウム光格子時計でもいいので）

1秒とは「**特定の電磁波**」の「**周期**」の定数倍

1秒の定義：時間の進みの定義

国際単位系 (SI) における時間の単位である「秒」の定義は，

セシウム133の原子の基底状態の二つの超微細準位の間の遷移に対応する放射の周期の9192631770倍が1秒

つまり，（セシウム原子時計でもストロンチウム光格子時計でもいいので）

1秒とは「**特定の電磁波**」の「**周期**」の定数倍

周期は振動数に反比例するので
この定義を逆手にとって，以下のような時間の進みを**定義**する。

重力場中の時間の進み Δt は
特定の電磁波の**振動数** ω に反比例する

$$\boxed{\Delta t \propto \frac{1}{\omega}}$$

高さの異なる地点での時間の進み方

$r = R$（地上）の時計の進み Δt_1 と，

$r = R + h$（スカイツリー展望台）の時計の進み Δt_2 の比は

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

（振動数に反比例）

高さの異なる地点での時間の進み方

$r = R$ （地上）の時計の進み Δt_1 と，

$r = R + h$ （スカイツリー展望台）の時計の進み Δt_2 の比は

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g}{R+h}}}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{R}}} > 1$$

（重力赤方偏移の逆数）

となり，スカイツリー展望台においた時計のほうが進む！

高さの異なる地点での時間の進み方

$r = R$ （地上）の時計の進み Δt_1 と，
$r = R + h$ （スカイツリー展望台）の時計の進み Δt_2 の比は

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g}{R+h}}}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{R}}} > 1$$

（重力赤方偏移の逆数）

となり，スカイツリー展望台においた時計のほうが進む！

R は地球半径，$h = 450\mathrm{m}$ はスカイツリー展望台の高さ
数値を入れて計算すると，

スカイツリー展望台では，時間は1日あたり10億分の 4.2 秒すすむ。

円軌道上を運動する人工衛星の時間の進み方

- $r = r_1$ （地上）に静止している時計の進み Δt_1
- r に静止している時計の進み Δt
- 半径 r の円軌道を描いて運動する時計の進み $\Delta\bar{t}$

$$\frac{\Delta\bar{t}}{\Delta t_1} = \frac{\Delta t}{\Delta t_1} \cdot \frac{\Delta\bar{t}}{\Delta t} = \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r_1}}} \cdot \sqrt{1 - V^2}$$

高さの異なる地点での時間の進みの比・運動によるローレンツ因子

円軌道上を運動する人工衛星の時間の進み方

- $r = r_1$ （地上）に静止している時計の進み Δt_1
- r に静止している時計の進み Δt
- 半径 r の円軌道を描いて運動する時計の進み $\Delta \bar{t}$

$$\frac{\Delta \bar{t}}{\Delta t_1} = \frac{\Delta t}{\Delta t_1} \cdot \frac{\Delta \bar{t}}{\Delta t} = \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r_1}}} \cdot \sqrt{1 - V^2}$$

高さの異なる地点での時間の進みの比・運動によるローレンツ因子

$\sqrt{1 - V^2} = 1/(-u_\mu \bar{u}^\mu)$ より，$\bar{u}^\mu$ の測地線方程式を解いて求めると

$$\boxed{\frac{\Delta \bar{t}}{\Delta t_1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{2}\frac{r_g}{r}}}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r_1}}}}$$

この式は，一般相対論的に**厳密に成り立つ。**

円軌道上を運動する人工衛星の時間の進み方

$$\frac{\Delta \bar{t}}{\Delta t_1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{2}\frac{r_g}{R+h}}}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{R}}}$$

国際宇宙ステーションの時間の遅れ
宇宙ステーションの高度 $h = 410\,\mathrm{km}$ を使うと，

宇宙ステーションの時計は 1 年あたり 0.009 秒 遅れる。

（注：Wikipedia 日本語版の数値は不正確。英語版はほぼ上記。）

国際宇宙ステーションの時間の遅れ

宇宙ステーションの高度 $h = 410\,\mathrm{km}$ を使うと，

宇宙ステーションの時計は 1 年あたり 0.009 秒 遅れる。

（注：Wikipedia 日本語版の数値は不正確。英語版はほぼ上記。）

時間の遅れは、異なる加速度の下にある2つの時計が異なる時間を指す理由を説明する。例えば、ISSにおける時間は、地球上の時間よりも6ヶ月につき0.007秒遅れる。GPS衛星が機能するためには、地球上のシステムと協調するために、時空の曲がりを考慮する必要がある[1]。

Time dilation explains why two working clocks will report different times after different accelerations. For example, time goes slower at the ISS, lagging approximately 0.01 seconds for every 12 Earth months passed. For GPS satellites to work, they must adjust for similar bending of spacetime to coordinate properly with systems on Earth.[1]

円軌道上を運動する人工衛星の時間の進み方

$$\frac{\Delta\bar{t}}{\Delta t_1} = \frac{\sqrt{1-\frac{3}{2}\frac{r_g}{R+h}}}{\sqrt{1-\frac{r_g}{R}}}$$

国際宇宙ステーションの時間の遅れ
宇宙ステーションの高度 $h = 410\,\mathrm{km}$ を使うと，

宇宙ステーションの時計は 1 年あたり 0.009 秒 遅れる。

運動による遅れと重力による進みのせめぎあい

GPS 衛星の時計の進み
GPS 衛星の高度 $h = 20200\,\mathrm{km}$ を使うと，

GPS 衛星の時計は 1 日あたり 3.845×10^{-5} 秒 進む。

重力場中を運動する時計の進み方

円軌道だけでなく，

動径方向の自由落下運動でも

一般的な楕円運動でも

重力場中の測地線方程式が解ける運動であれば，

すべて，時間の進み方がわかる！

時間の進み方だけではない

・光源や観測者の運動による
特殊相対論的な光のドップラー効果

・重力源に近いところから放射された光の
一般相対論的な重力赤方偏移

・膨張宇宙における宇宙論的赤方偏移

通常の教科書では，それぞれ別々の
やり方で説明されてきたものが…

光の測地線方程式 $\dfrac{d\boldsymbol{k}}{dv} = \boldsymbol{0}$ と

観測者が測定する振動数 $\omega \equiv -\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u}$ で

すべて統一的に説明できる！

… というわけで
ローレンツ変換に頼らずに
特殊および一般相対論的効果を
統一的に理解することが
できた！
と思いますが，いかがでしょうか？

終

かさい ますみ

葛西 真寿

kasai@hirosaki-u.ac.jp